

# *Geometria tra le pieghe*

1° Incontro 6 maggio 2025

Sala del Mutuo Soccorso, via Zambonate,33

Antonio Criscuolo Mathesis Bergamo APS

# Sommario dei tre laboratori

## 6 maggio 2025 *Piegando la carta si fa geometria?*

- Tre pieghe quasi a caso....
- Pieghiamo una scatola
- Foglio di carta VS Piano geometrico e Pieghe VS Rette
- La Geometria dei fogli A4

## 13 maggio 2025 *Regole del gioco e costruzioni*

- Assiomi della Geometria euclidea VS Assiomi della Geometria della piegatura della carta.
- Il triangolo, il quadrato e la costruzione di poligoni con la piegatura della carta.

## 20 maggio 2025 *Dal piano allo spazio con la piegatura della carta.*

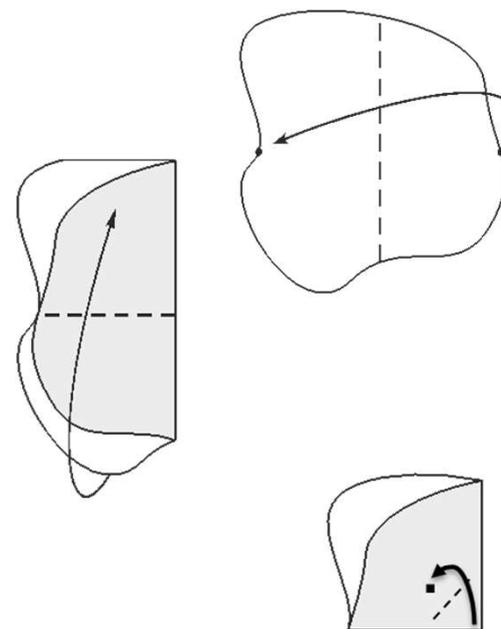
- I cinque solidi platonici
- Costruzione di solidi platonici: tetraedro, ottaedro e cubo.

# *Tre pieghe quasi a caso....*

# Piegando la carta si fa geometria?

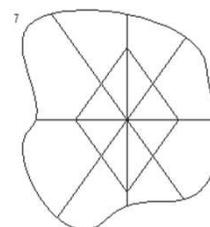
Pieghiamo tre volte un foglio di carta....

1. Piegare un foglio per ottenere una prima piega.
2. Ripiegare il foglio sovrapponendo a se stessa la piega appena realizzata, si ottiene così una punta.
3. Ripiegare ancora il foglio portando la punta a sovrapporsi ad un qualsiasi punto del foglio stesso



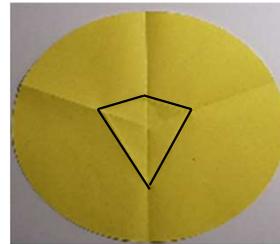
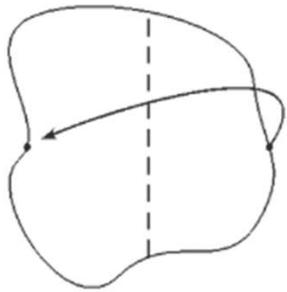
.....riaprendo il foglio che figura geometrica osserviamo?

- E' proprio un rombo? Perché ?
- Quali le relazioni tra le pieghe realizzate e il rombo con le sue proprietà?
- Se tracciamo a caso la seconda piega che figura otteniamo? Perché?

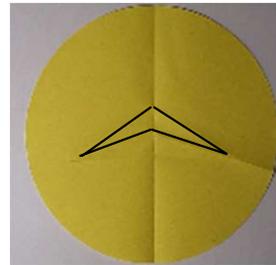
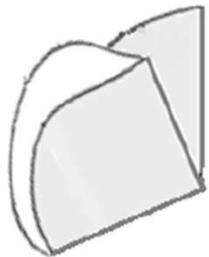


# Piegando la carta si fa geometria!!!!

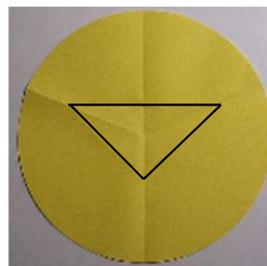
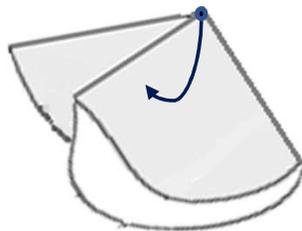
# Tre pieghe a caso



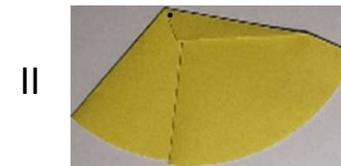
Deltoide  
Poligono convesso



Poligono concavo



Triangolo isoscele



## Piegando la carta si fa geometria: concetti e proprietà geometriche

Con due pieghe (*piega a caso* e *piega sulla piega stessa*) si realizza un modello che “incorpora” il **concetto di perpendicolarità** e **le definizioni di rette perpendicolari e di angolo retto**.

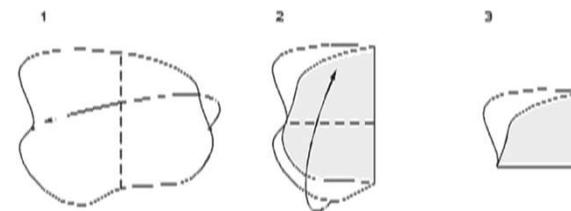


- Perché si ottiene un rombo?
- Che cos'è un rombo? (Qual è la sua proprietà caratteristica – definizione)  
Quali le sue proprietà?
- Quali elementi e quali proprietà del rombo sono generati dalle tre piegature?
  - I piegatura: una diagonale del rombo
  - II piegatura: l'altra diagonale del rombo perpendicolare alla prima
  - III piegatura: il quattro lati uguali del rombo
- Se la II piegatura è realizzata in modo impreciso (non piega su se stessa) si ottengono altre figure.

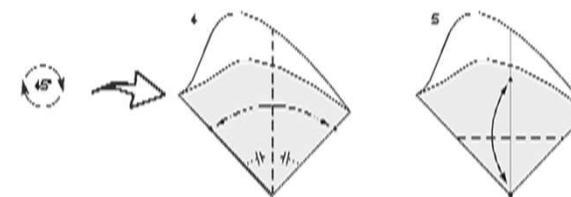
# Piegando la carta si fa geometria: concetti e proprietà geometriche

Come realizzare un quadrato anziché un generico rombo?

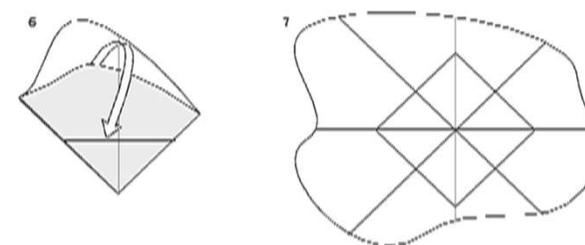
Si realizzano le prime due pieghe....



... poi si sovrappongono i bordi laterali dell'angolo retto .....

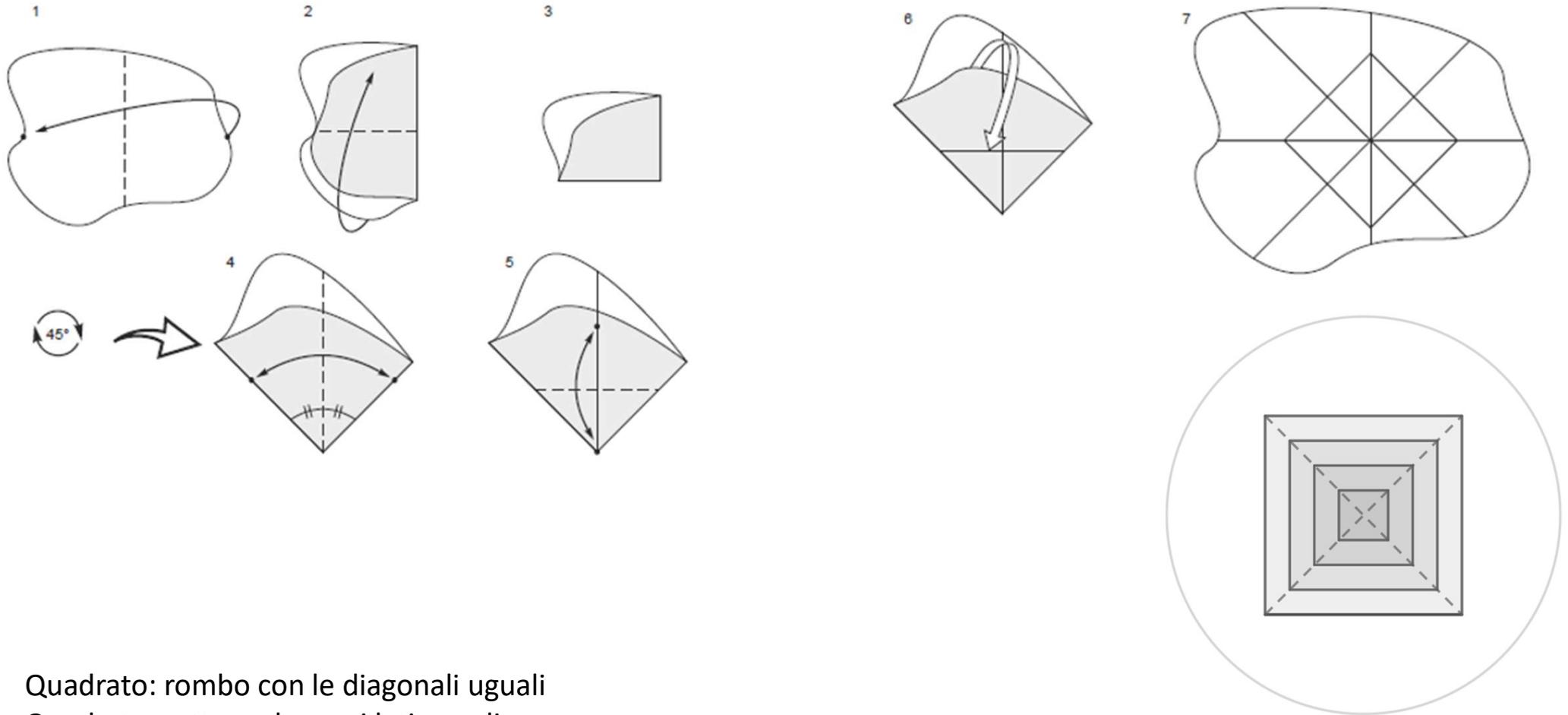


.... e infine si sovrappone il vertice dell'angolo retto ad un punto qualsiasi della precedente piega bisettrice dell'angolo retto



*Si tratta proprio di un quadrato? Perché?*

## Quadrato in quattro mosse.



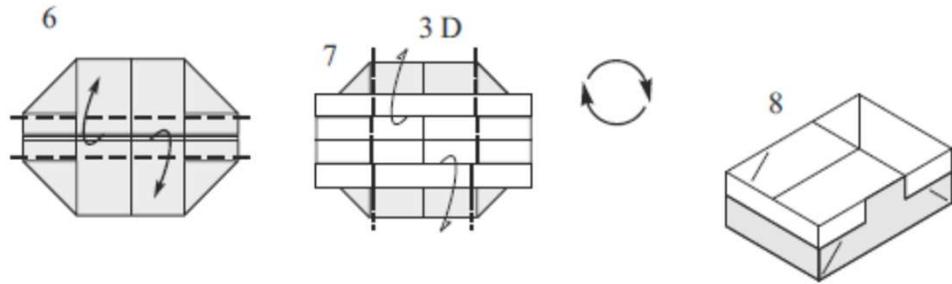
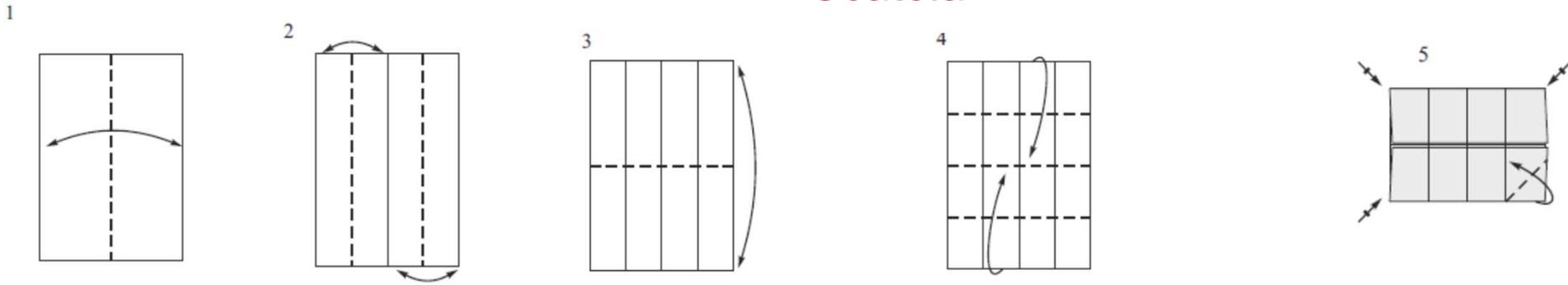
Quadrato: rombo con le diagonali uguali

Quadrato: rettangolo con i lati uguali

Ragnatela quadrata  
foglio circolare carta forno

# *Pieghiamo una scatola*

# Scatola



Che figura solida abbiamo ottenuto? Che forma?

...scatola rettangolare risma di carta mattone libro

Definizione geometrica di parallelepipedo rettangolo:

**prisma retto** avente come basi due **rettangoli**

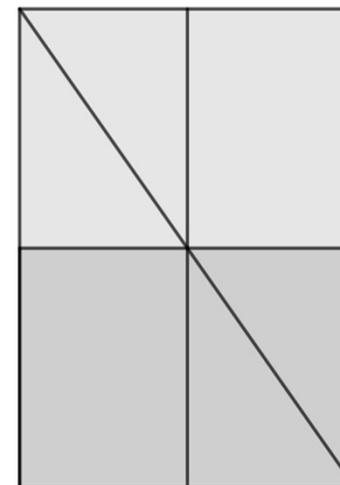
È un esaedro (solido con sei facce) in cui tutte le facce sono rettangoli

## Scatola rettangolare: concetti e proprietà aritmetiche e geometriche

Divisione di un foglio A4 in 16 rettangoli eguali

- Frazioni

- Dividendo sia il lato lungo che quello corto per quattro:  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
- Ripiegando il foglio su se stesso (senza riaprirlo):  $1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$



- Rettangoli simili

- Successivi dimezzamenti di un foglio A4 → A5 → A6 → A7 → A8 (dimezzamento del lato lungo). Rettangoli simili

- Crescita moltiplicativa

- Ripiegare il foglio A4 più volte e contare il numero di strati

<b>n. piegature</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>n. strati del foglio</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>16</b>	<b>32</b>	<b>...</b>
	<b>A4</b>	<b>2 A5</b>	<b>4 A6</b>	<b>8 A7</b>	<b>16 A8</b>		

*Foglio di carta VS Piano geometrico*  
*Pieghe VS Rette*

# Origini della Matematica e della Geometria

## Le origini della matematica

- Matematica dell'Antico Egitto (2000 a.C. - 600 a.C.)
- Matematica dell'antica Mesopotamia ( 2000 a.C. - 300 a.C.)
- Matematica dell'antica India (900 a.C. - 200)
- Matematica greco-ellenistica (circa 550 a.C. — 400 d.C.)

La geometria si è sviluppata secondo **tre dimensioni principali** e tre aspetti che sono collegati tra di loro.

- **aspetto pratico intuitivo:** studio degli aspetti spaziali del mondo: forme geometriche, misura di lunghezze, aree, volumi.
- **aspetto teorico:** elaborazione di un sistema formale a partire dalla teoria geometrica assiomatica di Euclide
- **aspetti visuo-spaziali:** visualizzazione, disegno e costruzione.

# Origini della Geometria

Ipotesi sulle origini delle geometria:

- da riti primitivi
- dalla necessità di costruire edifici
- di misurare terreni
- esigenze estetiche



## Geometria

**Egitto:** La geometria era utilizzata per la costruzione delle piramidi e per la misurazione dei terreni agricoli, come descritto nel *Papiro di Rhind*.

**Mesopotamia:** I Babilonesi utilizzavano la geometria per la costruzione di ziggurat e per la suddivisione dei campi, come evidenziato nelle tavolette di argilla.

**Grecia:** Euclide, con i suoi *Elementi*, ha sistematizzato la geometria in un'opera che è rimasta un punto di riferimento per secoli.

**India:** I matematici indiani utilizzavano la geometria per la costruzione di altari e per scopi astronomici, come descritto nei *Sulbasutra*.

La geometria dei babilonesi, degli egizi è una geometria intuitiva

Con i matematici greci è diventata anche razionale, ragionamento deduttivo

## Gli enti fondamentali della Geometria

Partiamo dalle definizioni del primo libro degli Elementi di Euclide (300 a.c.)

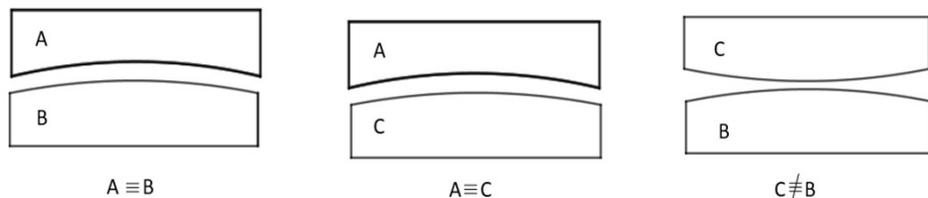
- I Punto è ciò che non ha parti.
- IV Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa.
- VII Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa.

*Nel sistema assiomatico di Hilbert della geometria euclidea, punti, rette e piani sono considerati entità primitive, ma si sceglie di non affermare nulla circa una loro natura intrinseca. Si considerano piuttosto alcune relazioni che possono sussistere o meno tra le singole entità primitive. (Fondamenti della geometria, 1899)*

Immagine intuitiva dei concetti di punto, retta e piano riprese dallo spazio fisico

- Punta del gessetto sulla lavagna, otteniamo l'immagine del punto
- Facendo scorrere la punta del gessetto otteniamo una linea
- Facendo scorrere la punta del gessetto lungo il bordo di una riga otteniamo una linea retta, retta come filo teso, retta come linea di minima distanza tra due punti
- Piano come superficie di un lago,....

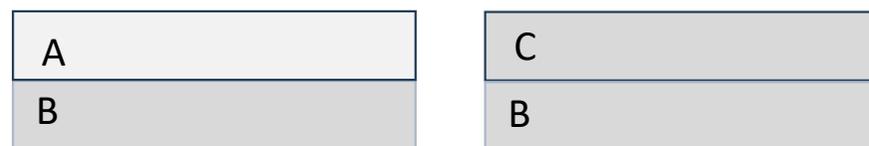
## Il piano-fisico e il piano-foglio della Geometria della piegatura



Se la superficie  $A$  coincide con la superficie  $B$  e la  $B$  con  $C$  allora  $A, B$  e  $C$  sono superfici piane.

$A \cong B \cong C$

Tre superfici piane di paragone



**Avendo ora a disposizione un piano di riferimento, anzi tre piani di riferimento, sovrappponendo ad esso un foglio di carta in modo che vi aderisca perfettamente, si ottiene un modello di piano geometrico, un piano-foglio che, immaginato illimitato, può essere considerato l'ente fondamentale della geometria della piegatura della carta.**

## Il piano-fisico e il piano-foglio della Geometria della piegatura

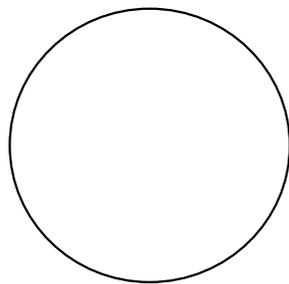


$$A \equiv B \equiv C$$

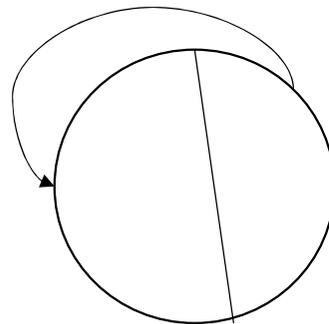
Tre superfici piane di paragone

Quindi scegliendo come **assunto fondamentale della GPC il piano-foglio**, è possibile affermare che **la traccia di una piega**, limitatamente al piano-foglio, **rappresenta una retta** e che **due pieghe che si intersecano individuano un punto**.

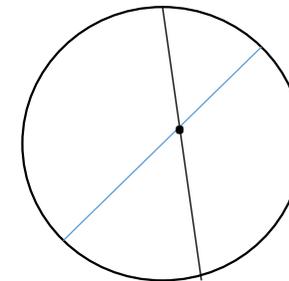
Piano, retta e punto non più solo enti primitivi della geometria, ma anche enti che, nell'ottica della GPC, possono essere definiti operativamente.



Piano



Retta



Punto

# Artefatto carta

La carta è un artefatto.

- *La traccia di una piega è - limitatamente al foglio, considerato piano - una retta.*
- *Due pieghe che si intersecano individuano un punto.*
- *Piegando un foglio si realizza una simmetria di cui la piega è asse.*

Quali sono le caratteristiche fisiche del foglio di carta che ne fanno un artefatto cognitivo.

In altri termini: perché le pieghe della carta sono rettilinee?

**Le pieghe sono rettilinee perché la carta è molto flessibile, ma al tempo stesso è molto resistente alla trazione.**

Flettendo un foglio di carta si ottiene, nella zona interessata dalla flessione, una superficie cilindrica cioè una superficie costituita da rette. Flettendo sempre di più la superficie cilindrica assume un raggio sempre minore e via via tende a ridursi ad una retta, ad una piega rettilinea.



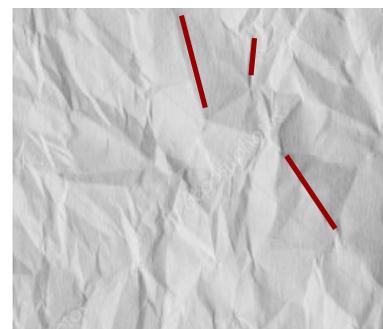
# La Geometria origami: foglio di carta e pieghe

Foglio di carta, ente fondamentale della geometria della piegatura della carta: sottile, di spessore uniforme, resistente alla trazione, e pensato illimitato.

Perché le pieghe della carta sono rettilinee ?

Perché un foglio di carta aderisce perfettamente, senza grinze, a superfici cilindriche e non aderisce invece al collo di una bottiglia ?

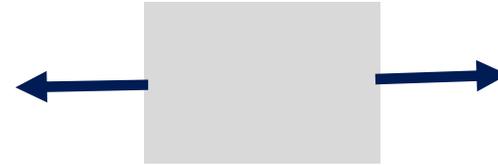
Facciamo ora un semplice esperimento: appallottolare un foglio di carta, pressare e spianare con forza la pallina di carta, ridistendere il foglio:  
**le tracce del foglio spiegazzato sono rettilinee**



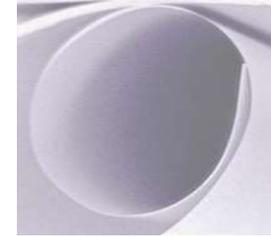
# La Geometria della piegatura della carta : foglio di carta e pieghe

Un foglio di carta è “quasi” rigido alla **trazione**.

Se sottoposto a trazione non si lacera

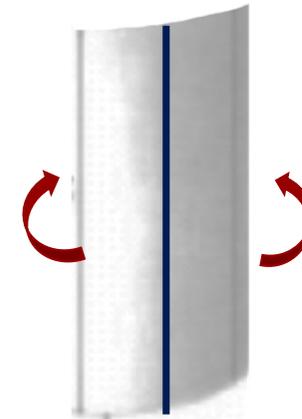


Un foglio di carta non offre “quasi” resistenza alla **flessione**.



Si può flettere facilmente formando una superficie cilindrica.

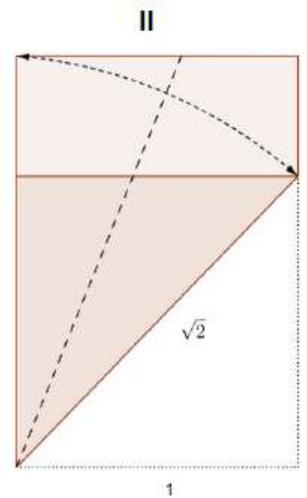
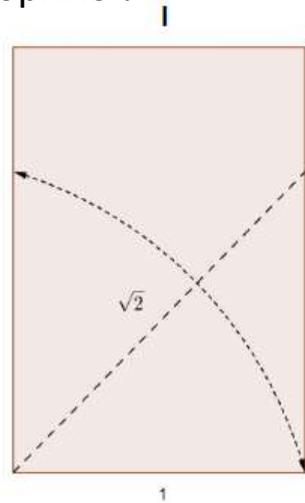
Continuando a flettere, riducendo sempre più il raggio del cilindro, in corrispondenza della **flessione massima, si otterrà, una piega rettilinea**, retta generatrice del superficie cilindrica.



# *La Geometria dei fogli A4*

## Qual è il rapporto tra altezza e larghezza di un foglio A4?

Realizziamo due pieghe per scoprirlo !



Il rapporto tra i lati dei rettangoli A0 – A10 è uguale al rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato.

$$\frac{\text{lato lungo}}{\text{lato corto}} = \sqrt{2} = \frac{\text{diagonale del quadrato}}{\text{lato del quadrato}}$$

$$1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{3}$$

Lati di un triangolo rettangolo

$$1^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$$

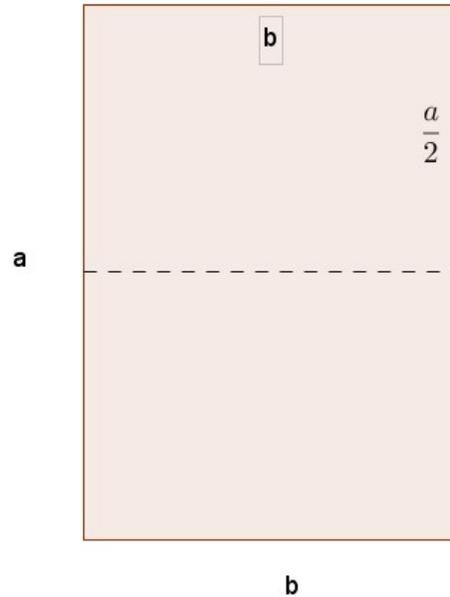
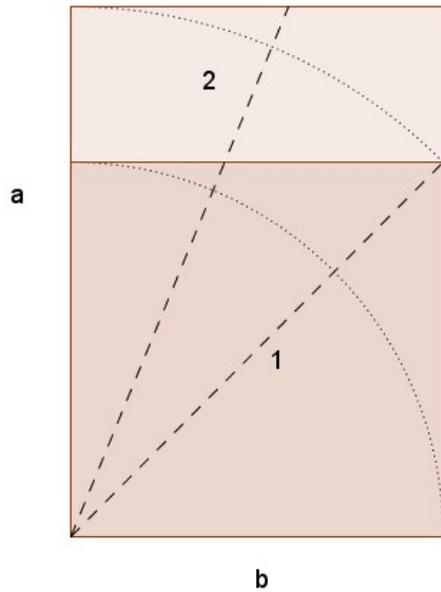
$$1 + 2 = 3$$

Una terna Pitagorica costituita anche da numeri irrazionali

Perché è stato scelto il rapporto  $\frac{\text{lato lungo}}{\text{lato corto}} = \sqrt{2}$  ?

Dimezzando un foglio A4 si ottengono due fogli A5 simili al foglio A4

Norma DIN 476 ( Germania, 1922)  
Norma ISO 216 (1975)



### Vantaggi

**Facilità di ridimensionamento:** negli ingrandimenti o riduzioni (fotocopie) il contenuto mantiene le stesse proporzioni.

**Efficienza economica ed ecologica** per l'eliminazione degli sprechi di carta nella suddivisione dei fogli in formati più piccoli.

**Uniformità:** il mantenimento delle proporzioni ha un valore estetico e facilita la gestione e l'archiviazione dei documenti.

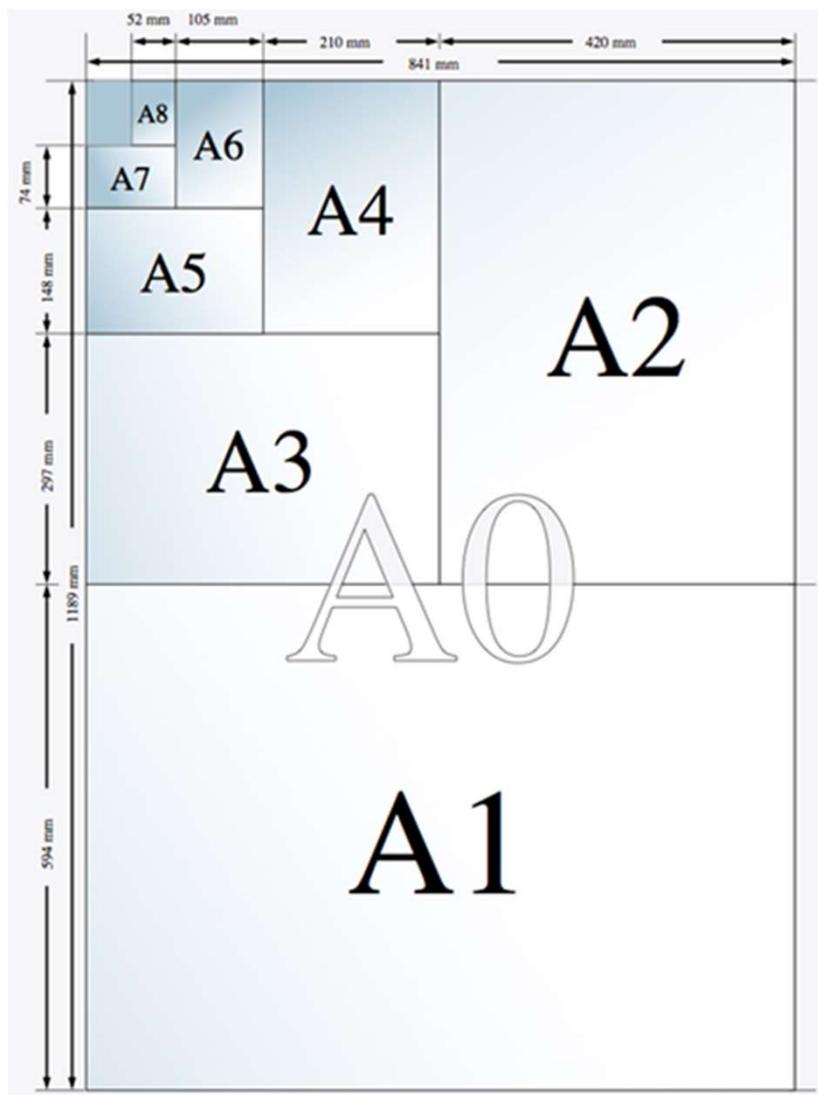
Piega 1  
Piega 2  $a = \sqrt{2}b$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} \longrightarrow a^2 = 2b^2 \longrightarrow a = \sqrt{2}b$$

**Soluzione geometrica**

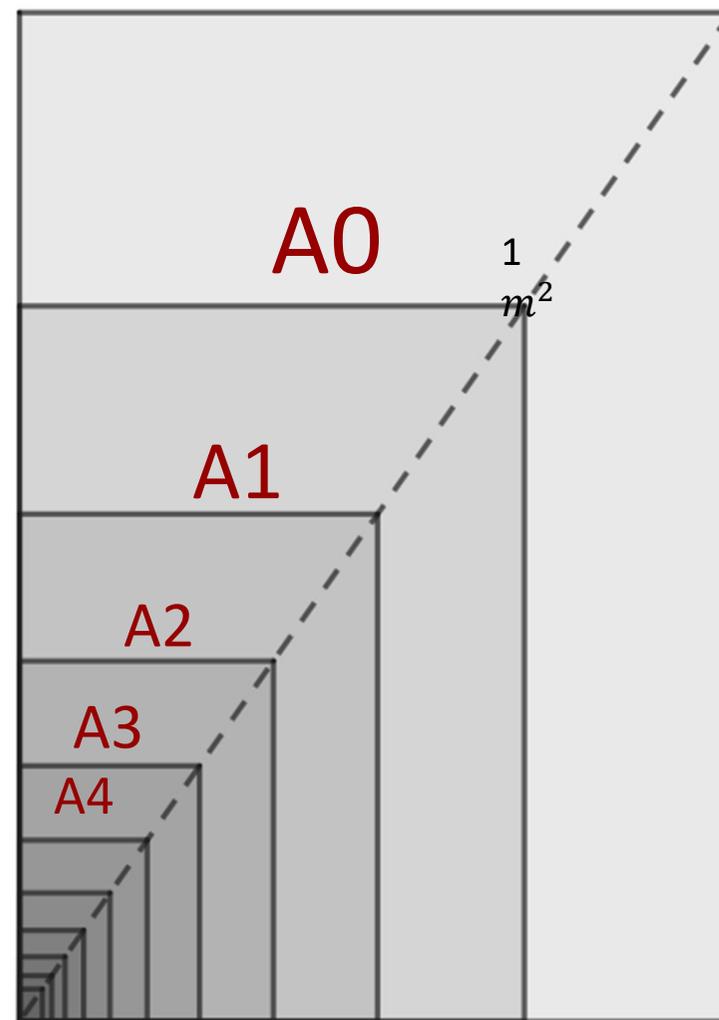
**Soluzione algebrica**

## La serie A dei formati della carta: da A0 a A10



Mathesis Bergamo APS

Antonio Criscuolo



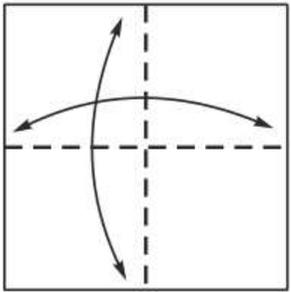
Geometria tra le pieghe

maggio 2025

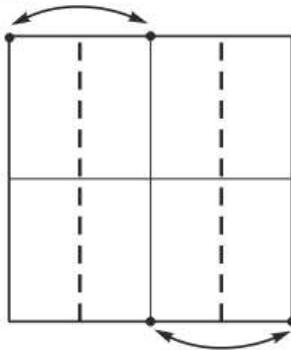
# Prisma segnato

# Prisma segnaposto

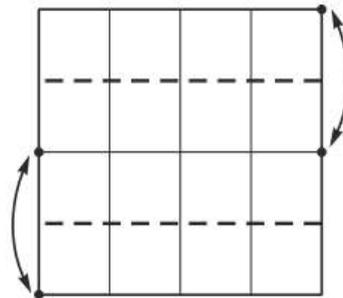
1



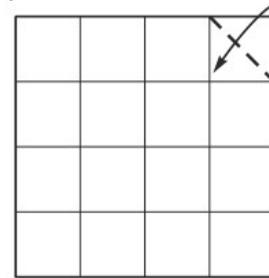
2



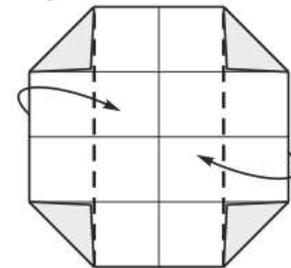
3



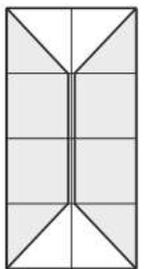
4



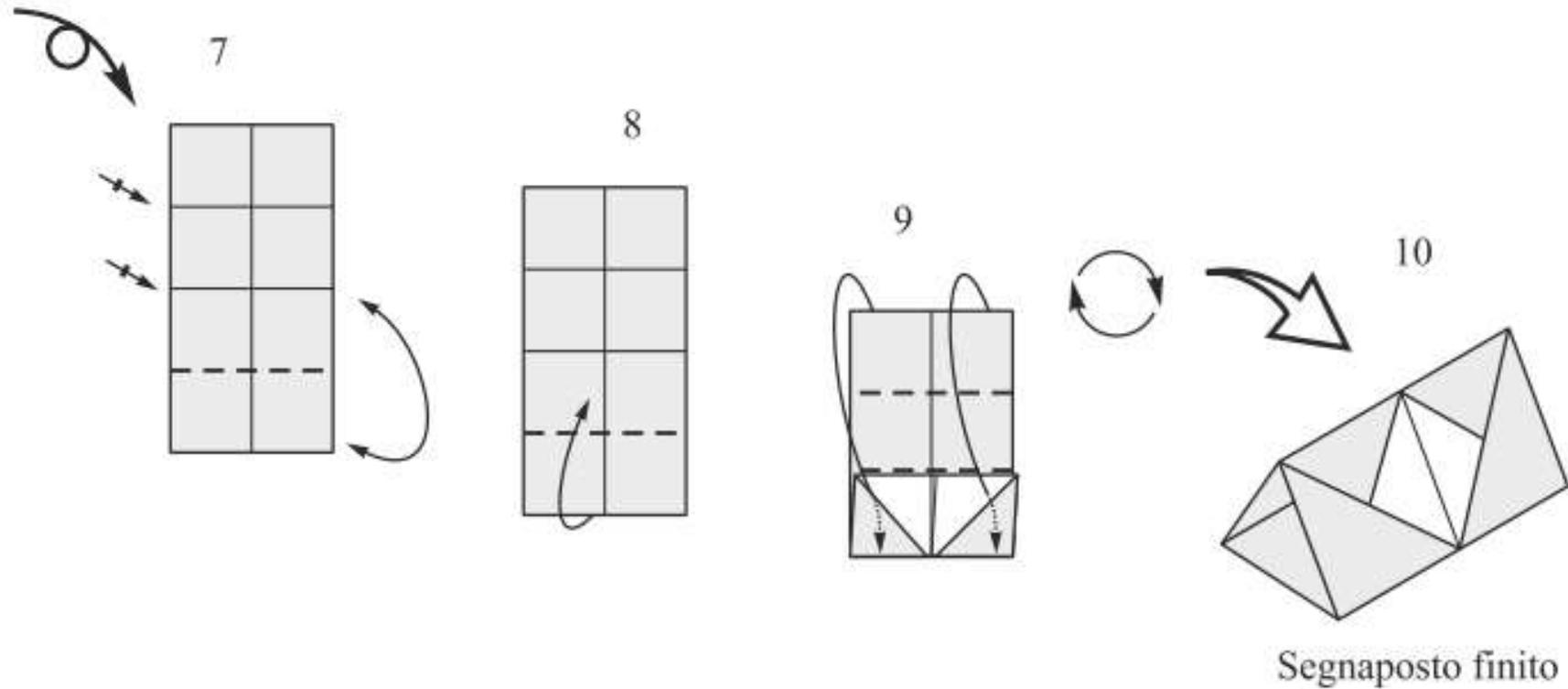
5



6



# Prisma Segnaposto



## Prisma segnaposto: concetti e proprietà geometriche

### Dalle due dimensioni alle tre dimensioni:

- da lati a spigoli, da vertici di un poligono a vertici di un poliedro, da poligono a faccia di un poliedro
- da area piana a superficie laterale di un solido

### Prisma (cavo) a base triangolare

- Quante facce, quanti spigoli, quanti vertici?
- Il poligono che si forma al centro di una delle facce del prisma è un quadrato? Perché?



### Perimetri e aree

Considerato pari ad 1 u il lato del sedicesimo di quadrato

- Quanto valgono perimetro ed area del rettangolo che contiene il quadrato
- Quanto vale l'area quadrato al centro della faccia rettangolare rispetto alla faccia stessa?